Prof. Amed

Z2011 Primer Parcial de Análisis Matemático II Fecha: 05-06-21

Ante la eventualidad de falla del sistema para subir el examen . con una tolerancia de diez minutos posteriores al horario de cierre.

Apellido y Nombre :..

Teórico 1) Demostrar que si un campo escalar f es diferenciable en $\bar{X}_0 \Rightarrow f$ es contínua en $\bar{X}_0$

Teórico 2) a)Sea $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k \in I_f$. Defina conjunto de nivel k de f

b)Halle el conjunto de nivel 0 de f y represéntelo / $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2-16}{\sqrt{x.y}}$

P1) Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ /f(x,y)= $\begin{cases} \dfrac{y^2-2.y.x}{x^2+y^2} & \text{si } x.y \neq 0 \\ \operatorname{sen}(6x+3y) & \text{si } x.y = 0 \end{cases}$

a)Analice derivabilidad de f en $\bar{x}_0 = (0,0)$ $\forall \breve{u}$ b)Halle $\bar{\nabla} f(\bar{x}_0)$ con $\bar{x}_0 = (0,0)$

c)¿Se cumple: $\forall \breve{u}$: $f'(\overline{x_0}, \breve{u}) = \overline{\nabla f}(\bar{X}_0) \bullet \breve{u}$? d) Analice si f es diferenciable en $\bar{x}_0 = (0,0)$

P2) Dada $z = f(u,v)$ con $f(u,v) = u.v^2$

con $u = x^2 y - 14$

$v = v(x,y)$, resulta $z = h(x,y)$

Halle las direcciones $\breve{u}$ para que $h'(\bar{X}_0, \breve{u}) = 0$. Sabiendo que $\bar{X}_0 = (3,2)$

y que $v(x,y)$, queda definida implícitamente por la ecuación: $4e^{2x-3y} + 4v.x - 6\ln v - 16 = 0$

P3) Sea la ecuación : $\frac{1}{2}x + 2y - \frac{z}{4} + 1 = 0$ la del plano tangente en $\bar{X}_0 = (2,1,z_0)$

a la gráfica de ecuación $z = h(x,y)$ / $h = f \circ \bar{g}$ con f diferenciable.

$\bar{g}(x,y) = (x^2 + x.y \ , \ x + y^2)$

Halle la derivada direccional máxima de f en $(6,3)$ y la dirección responsable.

P4) Sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ / $f(x,y,z) = x^2.y + y^2 + 2z$ Halle la derivada direccional de f en $\bar{X}_0 = (1,1,1)$

respecto del versor tangente a la curva C en $\bar{P}_0 = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 6)$ $C = S_1 \cap S_2$

$S_1: z = x^2 + 2y^2$ $S_2: z = 8 - x^2$ (Construya una función vectorial paramétrica para C)

Represente la Curva y el versor tangente a la misma en dicho punto.

AM2	1° Parcial Prof. AMED	HOJA N° 1/3 FECHA 5-6-21

T1 Demostrar que si un campo escalar f es diferenciable en $\bar{x}_0 \Rightarrow$ f es continua en $\bar{x}_0$

f diferenciable en $\bar{x}_0$, entonces: f'_x y f'_y

$$f(\bar{x}_0+\vec{h}) - f(\bar{x}_0) = \vec{\nabla} f(\bar{x}_0)\cdot\vec{h} + \varepsilon(\vec{h})\,\|\vec{h}\|$$

donde $\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \varepsilon(\vec{h}) = 0$ ①

$\bar{x}_0 \in Dom(f) \therefore \exists\, f(\bar{x}_0)$

y $\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} f(\bar{x}_0) = f(\bar{x}_0)$ ② (pues $f(\bar{x}_0) \in \mathbb{R}$)

$f'_x(\bar{x}_0)$ y $f'_y(\bar{x}_0)$ existen pues f es diferenciable en $\bar{x}_0$

$\therefore \lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \nabla f(\bar{x}_0)\cdot\vec{h} = 0$ ③

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \left[f(\bar{x}_0+\vec{h}) - f(\bar{x}_0)\right] = \lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \left[\nabla f(\bar{x}_0)\cdot\vec{h} + \varepsilon(\vec{h})\,\|\vec{h}\|\right]$$

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} f(\bar{x}_0+h) - \underbrace{\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} f(\bar{x}_0)}_{\times ②\, = f(\bar{x}_0)} = \underbrace{\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \nabla f(\vec{x}_0)\cdot\vec{h}}_{\times ③\, = 0} + \underbrace{\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \varepsilon(\vec{h})\,\|\vec{h}\|}_{\times ①\, = 0}$$

$$\boxed{\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} f(\vec{x}_0+h) = f(\bar{x}_0) \Rightarrow \text{f es continua en } x_0}$$

NOTA

$\boxed{T2}$ a) Sea $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $k \in I_f$. Definir conjunto de nivel k de f

$$\boxed{C_k = \{\bar{x} \in D : f(\bar{x}) = k\}}$$

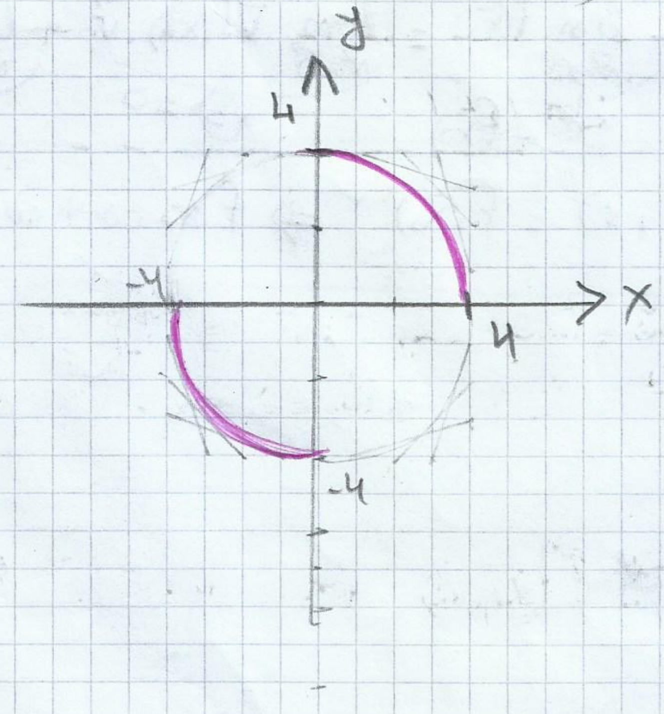
b) Hallar el conj. de nivel 0 de f y representarlo:

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2-16}{\sqrt{x \cdot y}}$$

$$Dom(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \cdot y > 0\} =$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x>0 \cap y>0) \cup (x<0 \cap y<0)\}$$

$$C_0 = \{(x,y) \in Dom(f) : \frac{x^2+y^2-16}{\sqrt{x \cdot y}} = 0\}$$

$$x^2+y^2-16 = 0 \to x^2+y^2 = 16$$
$$(x>0 \cap y>0) \cup (x<0 \cap y<0)$$



NOTA

AM 2	1º Parcial Prof. AMED	HOJA Nº 2/3 FECHA 5-6-21

(P1) Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ / $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2-2yx}{x^2+y^2} & \text{si } x.y \neq 0 \\ \operatorname{sen}(6x+3y) & \text{si } x.y = 0 \end{cases}$

a) Analizar derivabilidad de f en $\bar{x}_0 = (0,0)$ $\forall \breve{u}$ $\quad \breve{u} = (a,b)$, $a^2+b^2=1$

$$f'((0,0),\breve{u}) = \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+h\breve{u}) - \overset{0}{f(0,0)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(ha,hb)}{h} \ (*)$$

$(*)$ $\underbrace{\text{si } a.b = 0}_{a=0 \vee b=0} \Rightarrow = \lim_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(6ha+3hb)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(h(6a+3b))}{h}$

$6a+3b \neq 0 \longrightarrow = \lim_{h\to 0} \underbrace{\dfrac{\operatorname{sen}(h(6a+3b))}{h} \dfrac{(6a+3b)}{(6a+3b)}}_{\to 1} = \boxed{6a+3b \ \text{si } a.b=0}$

$(*)$ si $a.b \neq 0 \longrightarrow = \lim_{h\to 0} \dfrac{1}{h} \dfrac{h^2b^2 - 2hbha}{h^2a^2+h^2b^2} = \lim_{h\to 0} \dfrac{1}{h} \dfrac{\cancel{h^2}(b^2-2ab)}{\cancel{h^2}\underbrace{(a^2+b^2)}_{1}}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{b^2-2ab}{h} \quad \xrightarrow{\text{si } b^2-2ab=0} \lim = 0 \qquad \boxed{\text{si } b^2-2ab \neq 0} \to \lim = \infty$$

$$\boxed{f'((0,0),\breve{u}) = \begin{cases} 6a+3b & \text{si } a.b=0 \\ 0 & \text{si } ab \neq 0 \wedge b^2 = 2ab \xrightarrow{b\neq 0} \boxed{b=2a} \end{cases}}$$

b) Hallar $\nabla f(\bar{x}_0)$ con $(\bar{x}_0) = (0,0)$

$f'_x(0,0) \longrightarrow \breve{u} = (1,0) \longrightarrow b=0 \to f'_x(0,0) = 6$

$f'_y(0,0) \to \breve{u} = (0,1) \to a=0 \to f'_y(0,0) = 3$

$\boxed{\nabla f_{(0,0)} = (6,3)}$

c) ¿Se cumple $\forall \breve{u}: f'((\bar{x}_0,\breve{u}) \cdot \breve{u})$?

No, pues $\nexists f'(\bar{x}_0,\breve{u})$ para $\breve{u} = (a,b)$ / $b \neq 2a \wedge ab \neq 0$

d) Analizar si f es diferenciable en $x_0 = (0,0)$

f NO es diferenciable en (0,0) porque f NO es derivable en (0,0) en toda dirección

NOTA

(P2) Dada $z = f(u,v)$ con $f(u,v) = u v^2$

con $u = x^2 y - 14$

$v = v(x,y)$ resulta $z = h(x,y)$

Hallar las direcciones $\check{u}$ para que $h'(\bar{x}_0, \check{u}) = 0$. Sabiendo que $\bar{x}_0 = (3,2)$ y que $v(x,y)$ queda definida implícitamente por la ec.

$$4e^{2x-3y} + 4vx - 6\ln(v) - 16 = 0$$

$\times$ TFI $\Rightarrow v(x,y) \in C^1$ $\qquad \bar{g}(x,y) = (x^2y - 14, v(x,y))$

$u \in C^1$ (polinomio), f es un polinomio $\qquad \in C^1$

$h(x,y) = f(\bar{g}(x,y)) \rightarrow$ h es diferenciable

en un entorno de (1,1)

uso Regla de la cadena $\qquad h'((3,2), \check{u}) = \nabla h_{(3,2)} \cdot \check{u}$

$$Dh_{(x,y)} = Df_{(\bar{g}(x,y))} \cdot D\bar{g}_{(x,y)}$$

$$Dh_{(3,2)} = Df_{(\bar{g}(3,2))} D\bar{g}_{(3,2)} = \qquad D\bar{g}_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix}$$

$$= Df_{(4,1)} \cdot \begin{pmatrix} 12 & 9 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \qquad D\bar{g}_{(3,2)} = \begin{pmatrix} 12 & 9 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 9 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = [-4 \quad 25]$$

$$\boxed{\nabla h_{(3,2)} = (-4, 25)}$$

$$h'((3,2), \check{u}) = 0 \rightarrow \vec{u}_1 = (25, 4) \qquad \vec{u}_2 = (-25, -4) \rightarrow \boxed{\check{u}_1 = \left(\frac{25}{\sqrt{641}}, \frac{4}{\sqrt{641}}\right) \quad \check{u}_2 = \left(\frac{-25}{\sqrt{641}}, \frac{-4}{\sqrt{641}}\right)}$$

$$f_{(u,v)} = uv^2 \rightarrow \nabla f = (v^2, 2uv) \rightarrow \nabla f_{(4,1)} = (1, 8)$$

$$\bar{g}(3,2) = (3^2 \cdot 2 - 14, v(3,2)) = (4, 1)$$

$$v(3,2) \rightarrow 4e^{2\times 3 - 3\times 2} + 4v \times 3 - 6\ln(v) - 16 = 0$$

$$4 + 12v - 6\ln(v) = 16 \rightarrow \boxed{v = 1}$$

$$v'_x(3,2) = -\frac{G'_x(3,2,1)}{G'_v(3,2,1)} = -\frac{8e^{2x-3y} + 4v}{4x - \frac{6}{v}}\Bigg|_{(3,2,1)} = -\frac{12}{6} = \boxed{-2 = v'_x(3,2)}$$

$$v'_y(3,2) = -\frac{G'_y(3,2,1)}{G'_v(3,2,1)} = -\frac{-12e^{2x-3y}}{6}\Bigg|_{(3,2,1)} = \boxed{2 = v'_y(3,2)}$$

NOTA

AM2	1º parcial Prof. Amed	HOJA Nº 3/3 FECHA 5-6-21

(P3) Sea la ec. $\frac{1}{2}x+2y-\frac{z}{4}+1=0$ la ecuación del plano tangente en $\bar{x}_0=(2,1,z_0)$ a la gráfica de ecuación $z=h(x,y)$ tal que $h=f\circ\bar{g}$ con f diferenciable.

$\bar{g}(x,y)=(x^2+xy\ ,\ x+y^2) \longrightarrow \bar{g}(2,1)=(6\ ,\ 3)$

Hallar la derivada direccional máxima de f en (6,3) y la dirección responsable

ec. plano tangente: $\frac{1}{2}x+2y-\frac{z}{4}+1=0$

$\hookrightarrow z=h(2,1)+h'_x(2,1)\,(x-2)+h'_y(2,1)\,(y-1)$

todo x4

$2x+8y-z+4=0$

$$D\bar{g}(x,y)=\begin{pmatrix}2x+y & x\\ 1 & 2y\end{pmatrix}$$

$z=2x+8y+4$

$h'_y(2,1)=8$

$h'_x(2,1)=2$

$f'((6,3),\vec{v})\big|_{max}=\|\nabla f(6,3)\|$ y se da en la direcc. $\nabla f(6,3)$

h es dif: $h(x,y)=f(\bar{g}(x,y))$

$Dh(x,y)=Df(\bar{g}(x,y))\,D\bar{g}(x,y)$

$Dh(2,1)=Df(\bar{g}(2,1))\,D\bar{g}(2,1)$

$$\begin{bmatrix}2 & 8\end{bmatrix}=Df(6,3)\begin{pmatrix}5 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}f'_x(6,3) & f'_y(6,3)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\underbrace{5f'_x+f'_y}_{2} & \underbrace{2f'_x+2f'_y}_{8}\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}5f'_x+f'_y=2\\ 2f'_x+2f'_y=8\end{cases}\longrightarrow f'_x(6,3)=-\frac{1}{2}\qquad f'_y(6,3)=\frac{9}{2}$$

$\|\nabla f(6,3)\|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{9}{2}\right)^2}$

$\boxed{\vec{v}\big|_{max}=\left(-\frac{1}{2},\frac{9}{2}\right)}$

$\boxed{f'((6,3),\vec{v})\big|_{max}=\frac{\sqrt{82}}{2}}$

NOTA

(P4) Sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \,/\, f(x,y,z) = x^2y + y^2 + 2z$. Hallar la derivada direccional de f en $\bar{x}_0 = (1,1,1)$ respecto del ~~vector~~ versor tangente a la curva C en $\bar{P}_0 = (\sqrt{2},\sqrt{2},6)$ $\quad C = S_1 \cap S_2$

$S_1 = z = x^2+2y^2 \qquad S_2: z = 8-x^2$ (construir una función vectorial paramétrica de C)

Representar la curva y el versor tangente a la misma en dicho plano.

f es suma algebraica de polinomios → f es diferenciable

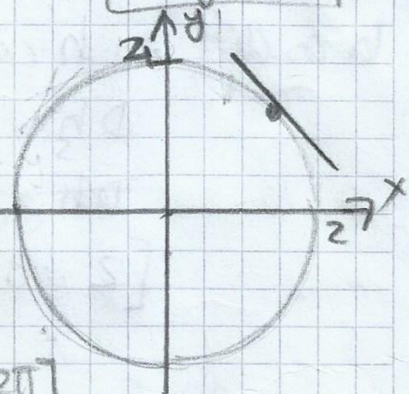
$$f'((1,1,1),\check{N}) = \nabla f_{(1,1,1)} \cdot \check{N} = (2,3,2)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{\sqrt{10}-8\sqrt{5}}{10}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'_x = 2xy \longrightarrow f'_{x(1,1,1)} = 2 \\ f'_y = x^2+2y \longrightarrow f'_{y(1,1,1)} = 3 \\ f'_z = 2 \longrightarrow f'_{z(1,1,1)} = 2 \end{array}\right\}$$

$$S_1 \cap S_2: \begin{cases} z = x^2+2y^2 \\ z = 8-x^2 \end{cases} \rightarrow x^2+2y^2 = 8-x^2$$

$$2(x^2+y^2) = 8 \rightarrow \boxed{x^2+y^2=4}$$

$$C: \begin{cases} x = 2\cos(t) \\ y = 2\,\text{sen}(t) \\ z = 8-4\cos^2(t) \end{cases}$$



$$C: \bar{\beta}(t) = (2\cos(t), 2\,\text{sen}(t), 8-4\cos^2(t))$$

$$\bar{P}_0 = (\sqrt{2} \quad , \sqrt{2} \quad , 6) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$$\begin{cases} \sqrt{2} = 2\cos(t) \longrightarrow t = \pi/4 \\ \sqrt{2} = 2\,\text{sen}(t) \\ 6 = 8-4\cos^2(t) \end{cases}$$

$$\bar{\beta}'(t) = (-2\,\text{sen}(t), 2\cos(t), -8\cos(t)\,\text{sen}(t))$$

$$\bar{\beta}'(\pi/4) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -4)$$

$$\vec{N} = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -4) \rightarrow \|\vec{N}\| = 2\sqrt{5} \rightarrow \check{N} = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\boxed{\left. f'((1,1,1),\check{N})\right|_{max} = \frac{\sqrt{10}-8\sqrt{5}}{10}}$$

NOTA